Il numero e. La funzione e^x.

Come gia' precedentemente accennato, la funzione esponenziale fornisce la rappresentazione matematica piu' semplice di un processo di crescita (o di diminuzione) . Costruiamo ora il modello matematico che spiega il fenomeno di crescita di una popolazione dall'istante iniziale t_0 in cui sono presenti $f(t_0)$ individui, all'istante $t_0 + 1$ in cui vogliamo calcolare la variazione di popolazione conoscendo i tassi di nascita n e di morte m (inizialmente costanti) nell'unita' di tempo . Riassumendo:

$f(t_0)$: popolazione presente all'istante t_0;

$n\, f(t_0)$: nati tra t_0 e $t_0 + 1$;

$m\, f(t_0)$: morti tra t_0 e $t_0 + 1$;

$f(t_0 + 1)$: popolazione presente all'istante $t_0 + 1$.

$$f(t_0 + 1) \approx f(t_0) + n\, f(t_0) - m\, f(t_0) = f(t_0) + (n - m)\, f(t_0) = (1 + x)\, f(t_0)$$

dove $x = n - m$: tasso netto di incremento della popolazione (che puo' essere sia positivo che negativo).

Il modello appena costruito e' comunque assai approssimativo in quanto non tiene conto del fatto che i tassi di nascita e di morte non sono quantita' discrete e costanti, ma variano istante per istante in tutto il periodo considerato. In questo caso, ad esempio, occorre tenere presente che la popolazione aumenta durante tutto il periodo che va da t_0 a t_1, cosicche' la popolazione risulta essere piu' numerosa nella II meta' del periodo; in altri termini ci sono piu' nascite e piu' morti nella II meta' ripetto alla I.

Per avere una formulazione piu' dettagliata occorre dividere a meta' il periodo considerato e calcolare la variazione della popolazione nella prima e nella seconda meta'.

Prima meta' .

$\frac{1}{2}$ n $f(t_0)$: nati tra t_0 e $t_0 + 1/2$;

$\frac{1}{2}$ m $f(t_0)$: morti tra t_0 e $t_0 + 1/2$;

$f(t_0 + 1/2)$: popolazione presente all'istante $t_0 + 1/2$.

$f(t_0 + 1/2) \approx (1 + \frac{1}{2} x) f(t_0)$.

Seconda meta' .

$\frac{1}{2} n (1 + \frac{1}{2} x) f(t_0)$: nati tra $t_0 + 1/2$ e $t_0 + 1$;

$\frac{1}{2} m (1 + \frac{1}{2} x) f(t_0)$: morti tra $t_0 + 1/2$ e $t_0 + 1$;

$f(t_0 + 1)$: popolazione presente all'istante $t_0 + 1$.

$f(t_0 + 1) \approx (1 + \frac{1}{2} x)^2 f(t_0)$.

Suddividendo in 4 sottoperiodi:

$f(t_0 + 1) \approx (1 + \frac{1}{4} x)^4 f(t_0)$.

In generale:

$f(t_0 + 1) \approx \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k f(t_0)$ (k: numero dei sottointervalli).

Al limite:

$$f(t_0 + 1) = \lim_{k \to \infty} (1 + x/k)^k f(t_0)$$

Questa formula ci dice che nell' unita' di tempo considerata la popolazione cresce di un fattore che e' dato dal limite della successione: $(1 + x)$, $(1 + \frac{x}{2})^2$, $(1 + \frac{x}{3})^3$ ......

Consideriamo ora la successione : 2, $(1 + \frac{1}{2})^2$, $(1 + \frac{1}{3})^3$ ...... e, al di la' del modello appena costruito, proviamo a tabulare $(1 + \frac{1}{k})^k$ per alcuni valori di k.

k	$(1+\frac{1}{k})^k$
1	2
2	2.25
3	2.370370
5	2.488320
10	2.593742
20	2.653297
50	2.691588
10^2	2.704814
10^3	2.716924
10^4	2.718145
10^5	2.718268
10^6	2.718280
10^8	2.718282

La successione tende a stabilizzarsi molto lentamente attorno a 2.71828: esiste comunque la dimostrazione rigorosa di questo fatto che noi omettiamo: ci basti sapere che questo numero, limite della successione sopra citata, e' il numero di Nepero e.

Inoltre: $$\lim_{k\to\infty} (1+\frac{x}{k})^k = e^x .$$

La funzione esponenziale $y = e^x$ e' una funzione molto nota e trova largo uso in diverse applicazioni: nel nostro caso si presta molto bene al modello di crescita di una popolazione.
Come si puo' notare dal grafico riportato nel capitolo riguardante le funzioni esponenziali, $y = e^x$ possiede tutte le proprieta' delle funzioni esponenziali precedentemente citate con base maggiore di 1.

<u>Modelli generali di crescita di una popolazione e decadimento radioattivo.</u>

Introduciamo in questo capitolo l'esemplificazione di due modelli gia' trattati per altra via (utilizzando le equazioni differenziali) nella parte I, par. 9.5 - esempi e applicazioni - .
Si e' appena visto come una generica funzione esponenziale :

(*) $$f(t) = a\,(b)^{kt}$$

(dove a: popolazione all'istante iniziale; k: costante di crescita; t: tempo reale) rappresenti bene la crescita di una popolazione. Cio' avviene quando la costante di crescita k e' positiva; nel caso in cui sia negativa si parla di diminuzione e come caso particolare si ha il fenomeno di decadimento radioattivo. Vediamo ora alcuni esempi di applicazione del modello citato.

1) La popolazione sulla Terra aumenta circa del 2% all'anno. Nel 1990 la popolazione stimata era di 5.2485 miliardi di persone. Costruire un modello di crescita adatto a questo caso.

(1) $$p = f(t) = 5.2485\ (1 + 0.02)^t$$

t : anni a partire dal 1990 ;

p : popolazione nell'anno 1990 + t.

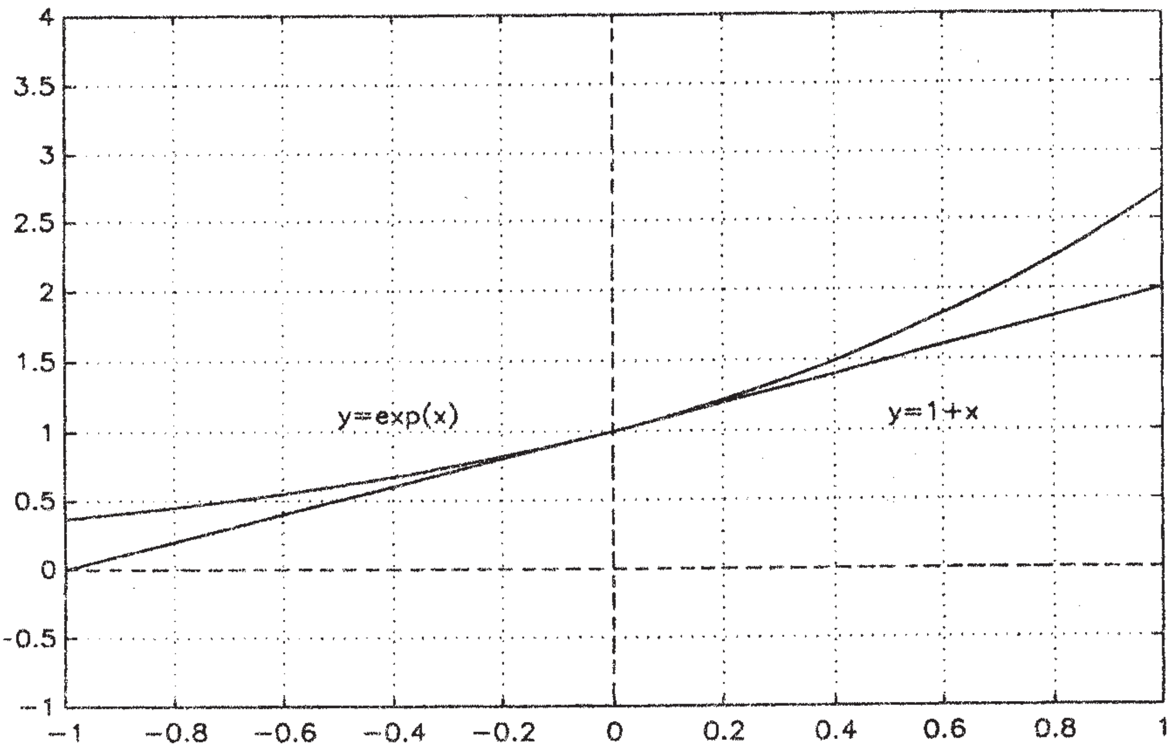
Riportandoci alla base e sopra citata (che ci risolve i problemi di calcolo), otteniamo :

(2) $$p = f(t) = 5.2585\ e^{0.02t}\ .$$

Nota: le funzioni (1) e (2) calcolano la stessa cosa ma sono molto diverse tra di loro: infatti (1 + 0.02) e' un termine lineare, mentre $e^{0.02}$ e' un termine esponenziale. Il motivo per cui si possono 'confondere' i due fattori e' spiegato con il grafico sotto illustrato. Infatti le due funzioni $y = 1 + x$ e e^x assumono 'quasi' gli stessi valori quando x e' prossimo allo 0, come si puo' anche notare dalla seguente tabella .

x	1 + x	e^x
0.01	1.01	1.01005
-0.01	0.99	0.990049
0.02	1.02	1.020201
0.04	1.04	1.0408
-0.04	0.96	0.96078
0.06	1.06	1.0618
0.08	1.08	1.0832
-0.08	0.92	0.9231
0.1	1.1	1.105
0.15	1.15	1.161
-0.15	0.85	0.86

Anche la rappresentazione grafica sottostante puo' risultare sufficientemente esaustiva e consentire di visualizzare gli scostamenti tra i valori delle due funzioni nell'intervallo [-1, 1] .



Tempi di raddoppio e di dimezzamento.

Sono i tempi in cui una popolazione raddoppia o si dimezza: supponiamo che il tasso di crescita per unita' di tempo di una popolazione sia dell' 1.3%. Vogliamo sapere quante unita' di tempo sono necessarie alla popolazione per raddoppiare.

Se la popolazione inizialmente e' N, vogliamo trovare il valore di t affinche' : $2N = N(1.013)^t$, cioe' $2 = (1.013)^t$. Passando ai logaritmi: $\log 2 = t \log 1.013$, da cui $t \approx 53.7$. A questa popolazione occorrono 54 unita' di tempo per raddoppiare.

Decadimento radioattivo.

E' un caso particolare della funzione (*) in cui e' $k < 0$.

Un caso molto esemplificativo e' quello del tasso di decadimento del carbonio14 tranmite il quale si possono datare parecchi reperti fossili e archeologici. La formula di decadimento del C^{14} e' :

$$p(t) = p_0\, e^{kt}$$

$k < 0$, p_0 numero degli atomi presenti inizialmente.

E' noto che il tempo di dimezzamento del C^{14}e' di 5730 anni e che nella materia vivente la presenza di C^{14} e' pressoche' costante: dopo la morte gli atomi di C^{14} decadono in C^{12} emettendo radiazioni, cosicche' dopo 5730 anni e' presente la meta' di C^{14}, dopo 11460 anni un quarto e cosi' via.

Poiche' e' noto il tempo di dimezzamento del C^{14} si puo' determinare k:

$$\frac{1}{2} p_0 = p_0\, e^{5730k} \text{, da cui } 0.5 = e^{5730k},\ k = \frac{\log 0.5}{5730} \approx -0.000120968$$

Supponiamo quindi di trovare un fossile contenente circa il 43% del C^{14} che possedeva in vita, l'eta' e' subito calcolata:

$$t = \frac{-\log 0.43}{0.000120968} \approx 6977.$$

Nota. Per datare reperti di milioni di anni il metodo del C^{14} non e' piu' utile in quanto completamente decaduto. Ad esempio se il carbonio 14 e' presente per lo 0.1%, si ha un tempo t pari a :

$$t = \frac{-\log 0.001}{0.000120968} \approx 57100.$$

3.4 Sistemi lineari.

Come si è visto in precedenza, talora si rivela utile, per determinare le radici di un'equazione, studiare le soluzioni di un sistema di equazioni e questo, dal punto di vista geometrico, significa determinare le intersezioni di curve piane, di superficie spaziali o di loro generalizzazioni in spazi a più dimensioni.

Il caso più semplice è rappresentato da un sistema di due equazioni di primo grado in due incognite, cioè dal <u>sistema lineare</u>:

$$(3.1) \qquad \begin{cases} a\ x + b\ y + c = 0 \\ a'\ x + b'\ y + c' = 0 \end{cases}$$

Per soluzione del sistema (3.1) si intende ogni coppia di numeri (x,y) che renda contemporaneamente soddisfatte le due equazioni del sistema.

La rappresentazione geometrica ci fornisce una interpretazione immediata, in quanto risolvere il sistema (3.1) non significa altro che determinare l'intersezione di due rette nel piano, le cui equazioni sono quelle che compaiono nel sistema. Due rette nel piano hanno <u>una</u> intersezione, oppure <u>nessuna</u>, se sono parallele, oppure <u>infinite</u>, se sono coincidenti.

Ricordiamo che, se le due rette coincidono, significa che i due polinomi di primo grado che le individuano sono tra loro proporzionali, cioè

$$a = h\ a'\ ,\ b = h\ b'\ ,\ c = h\ c'$$

essendo h un numero reale.

Se sono parallele, devono avere ugual coefficiente angolare : $m = k\ m'$, cioè, se b e b' sono diversi da zero, $a/b = a'/b'$, ovvero

$$a = k\ a'\ ,\ b = k\ b'$$

(ma $c \neq k\ c'$, altrimenti le due rette sarebbero coincidenti); nel caso sia $b = 0$, la prima retta sarebbe parallela all'asse dlle y, di equazione $x = -\ c/a$ e la seconda retta sarà parallela alla prima se e solo se $b' = 0$ ed avrà equazione $x = -\ c'/a'$.

Se le due rette sono incidenti, il punto di intersezione è unico ed allora le sue coordinate sono date dall'unica soluzione del sistema (3.1).

Allo scopo di ottenere una formula utile per eventuali generalizzazioni, riscriviamo il sistema (3.1) come

(3.2) $$\begin{cases} a_{11}\,x + a_{12}\,y = b_1 \\ a_{21}\,x + a_{22}\,y = b_2 \end{cases}$$

con ovvio legame tra i coefficienti del sistema (3.1) e quelli del sistema (3.2).

Se si risolve questo sistema con uno dei metodi noti (sostituzione o eliminazione, ecc.) si ottiene la soluzione sotto la forma :

(3.3) $$x = \frac{a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21}}\,,\quad y = \frac{a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21}}$$

purchè sia soddisfatta la condizione $a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21} \neq 0$.

Se fosse $a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21} = 0$, le due rette sarebbero parallele: infatti, tenuto conto della notazione di (3.1), si ricava $a/a' = a_{11}/a_{21} = a_{12}/a_{22} = b/b'$, quindi il sistema non ammette soluzioni.

Se fosse $a_{11}/a_{21} = a_{12}/a_{22} = b_1/b_2$, si avrebbe il caso delle due rette coincidenti, ovvero si avrebbero infinite soluzioni date da $y = (b_1/a_{12}) - (a_{11}/a_{12})\,x = (b_2/a_{22}) - (a_{21}/a_{22})\,x$.

Dal punto di vista più strettamente algebrico si può osservare che il problema della risoluzione di un sistema lineare in generale si articola in due tipi di problemi : i) il sistema ammette almeno una soluzione? ii) se sì, tale soluzione è unica, oppure come si individua la classe delle soluzioni?

Come visto, nel caso di sistemi del tipo (3.1), ovvero (3.2), la risposta dipende dal fatto che il numero $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21}$ sia uguele o diverso da zero: se $\Delta \neq 0$, <u>esiste ed è unica</u> la soluzione del sistema, data dalle (3.3); se $\Delta = 0$, occorre esaminare i termini noti: se $b_1/b_2 = a_{11}/a_{21} = a_{12}/a_{22}$ allora il sistema ammette <u>infinite</u> soluzioni e l'insieme S delle soluzioni è dato da

$$S = \{(x,y) \in \Re^2 : a_{11}\,x + a_{12}\,y - b_1 = 0\};$$

se invece b_1/b_2 non soddisfa tale condizione il sistema <u>non</u> ammette soluzioni o, come si usa anche dire, è <u>incompatibile</u>.

Nel caso che sia $b_1 = b_2 = 0$, il sistema si dice <u>omogeneo</u> e l'insieme delle soluzioni prende il nome di <u>nucleo</u> dell'insieme delle soluzioni del corrispondente sistema non omogeneo, che ammetterà allora una e una sola soluzione se e solo se tale nucleo si riduce allo zero (0,0) di $\Re^2$.

Più semplicemente si può osservare che il sistema omogeneo ammette sempre la soluzione (0,0), ma, se $a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21} = 0$, ammette altre infinite soluzioni: quelle fornite da

$$y = -(a_{11}/a_{12})\,x = -(a_{21}/a_{22})\,x$$

per valori arbitrari dalla x.

In corrispondenza, il sistema non omogeneo ammette una e una sola soluzione se quello omogeneo associato ad esso ammette solo la soluzione (0,0), non ammette soluzione se quello omogeneo ne ammette infinite.

Questa osservazione si può estendere al caso dei sistemi lineari di n equazioni in n incognite, con n intero positivo; la teoria dei sistemi lineari si può ancora estendere al caso di n equazioni in m incognite: si enuncia in tale caso un teorema che consente di stabilire se il sistema è compatibile (cioé se ammette soluzioni), quindi se la soluzione è unica o se si hanno infinite soluzioni.

Per la determinazione delle soluzioni, se si ha un numero piccolo di equazioni ed incognite, si usano i metodi di sostituzione, eliminazione, somma e sottrazione. Per sistemi di dimensioni maggiori si ricorre a tecniche numeriche che consentono di determinare esattamente o in approssimazione le soluzioni (una volta garantiti che esistano).

Ci limitiamo qui a ricordare che la tabella

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

(costruita con i coefficienti del sistema lineare di due equazioni in due incognite dato) prende il nome di matrice dei coefficienti e, in questo caso, si dice che è una matrice quadrata di ordine due. Il numero $a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21}$ si chiama <u>determinante</u> della matrice A e si indica con detA o $\det(a_{ij})$.

Generalizzando ancora il linguaggio, chiamiamo <u>matrice</u> di ordine mxn una tabella di mxn elementi (ad esempio, numeri reali) ordinati su m righe ed n colonne, del tipo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}),$$

con $i = 1,2,\dots,m$; $j = 1,2,\dots,n$.

Gli indici prendono il nome di : i, indice di riga, j, indice di colonna. Se m = n la matrice si dice quadrata. Una matrice formata da una sola riga (o una sola colonna) prende il nome di matrice riga (o matrice colonna) o anche, potendosi identificare con i vettori, vettore riga (o vettore colonna).

Ad ogni matrice quadrata A, nxn, si può associare in modo unico un numero, detto <u>determinante</u> di ordine n della matrice A, e si indica con detA, ovvero det(a_{ij}) . Esistono delle regole di calcolo dei determinanti di ordine qualunque; in questa sede ci limitiamo a fornire i determinanti di ordine 2 e 3.

n = 2 : è il caso già visto.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix};$$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21}\;;$$

n = 3 : è

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix};$$

$$\det A = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{31} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Si può costruire un'algebra delle matrici, cioé si possono fornire delle regole di calcolo tra matrici, o meglio si possono definire delle operazioni quali somma e prodotto tra matrici, ma si ha possibilità di effettuare sempre tali operazioni se ci si limita ad operare tra matrici quadrate di ugual dimensione.

Lo studio dei sistemi lineari e la determinazione delle loro soluzioni sono basati sull'algebra delle matrici e dei determinanti, sia dal punto di vista formale che numerico, ma non si vuole in questa sede procedere oltre.

Esercizi.

1)

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$$

$$m = n = 2;\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ \det A = 1x4 - 3x2 = -2 \neq 0.$$

Il sistema ammette una ed una sola soluzione, che calcoliamo con la regola di Cramer:

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{4x4 - 1x2}{-2} = -7\,,$$

$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}{\det A} = \frac{1x1 - 3x4}{-2} = \frac{11}{2}\,.$$

2)

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 6y = 1 \end{cases}$$

$m = n = 2$; $\det A = 0$.

Il sistema omogeneo, ottenuto ponendo uguali a zero i secondi membri delle equazioni del sistema, ammette infinite soluzioni, dunque il sistema dato non ammette soluzioni, ovvero è incompatibile.

3)

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 2y = 9 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

$m = 3$, $n = 2$; il sistema ammette soluzione $x = 1$, $y = 3$.

4)

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$m = 2$, $n = 3$; il sistema ammette infinite soluzioni. Infatti, ad esempio, soddisfa il sistema ogni terna di numeri reali (x,y,z) tali che sia $z = 1$, y arbitrario , $x = -y$.

5)

$$\begin{cases} kx - y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

Discutere le soluzioni al variare del parametro k reale.

E\` : $m = n = 2$; $\det A = 3k + 1$. Se $k = -\frac{1}{3}$ si ha $\det A = 0$.

Allora, se $k \neq -\frac{1}{3}$ si ha l'unica soluzione $x = 0$, $y = 0$; se $k = -\frac{1}{3}$ si hanno infinite soluzioni, date dalle coppie (x,y), con y arbitrario e $x = -3y$.

6) In una dieta di cavie per laboratorio è previsto un pasto contenente 40 unità di carboidrati, 25 di grassi, 25 di proteine. Si hanno tre tipi di cibi, aventi le seguenti composizioni:

cibo	carboidrati	grassi	proteine

x	5	3	1
y	2	3	5
z	7	2	3

Come occorre mischiare i cibi per ottenere il pasto richiesto?

La risposta si ottiene risolvendo il sistema :

$$\begin{cases} 5x + 2y + 7z = 40 \\ 3x + 3y + 2z = 25 \\ x + 5y + 3z = 25 \end{cases}$$

E' $m = n = 3$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, $\det A \neq 0$ (verificarlo), la soluzione è data da:

$$x = 4 \, , \, y = 3 \, , \, z = 2 \, ,$$

cioé occorre mischiare 4 parti di cibo x con 3 di y e due di z per rispettare la dieta richiesta.

7) La produzione di un cereale è legata ai concimi usati dalla seguente legge lineare : $z = a + bx + cy$, essendo z il raccolto di cereali, x un concime a base di fosfati, y uno a base di azotati, a la capacità produttiva del terreno senza l'uso di concimi di questo tipo, b e c due coefficienti di produttività dei singoli concimi. In tre terreni diversi, ma di ugual tipo, si sono usate quantità diverse di concimi, ottenendo ovviamente raccolti diversi :

Terreno	raccolto	fosfati	azotati
I	115	10	30
II	126	40	20
III	118	30	10

(non si introducono unità di misura: potrebbe essere il raccolto in quintali e i concimi in kg, o una qualunque altra scelta che abbia senso). Trovare i valori di a, b, c.

La soluzione si ottiene risolvendo il sistema di tre equazioni in tre incognite ottenuto dalla relazione data, sostituendo le tre terne di valori della tabella :

$$\begin{cases} a + 10\,b + 30\,c = 115 \\ a + 40\,b + 20\,c = 126 \\ a + 30\,b + 10\,c = 118 \end{cases}$$

che fornisce i valori:

$$a = 100 \, , \; b = 1/2 \, , \; c = 3/10 \; .$$

8) Un allevatore ha ricevuto un finanziamento di 100 milioni per allevare per un primo anno tre specie di animali da carne (x, y, z), diviso in tre capitoli di spesa di 20, 66, 14 milioni, così suddivisi: per la specie x - 5 milioni per l'acquisto, 10 per lo stabulo, 3 per nutrimento e assistenza-, per la specie y -4, 10, 2 milioni-, rispettivamente, per la specie z -2, 12, 2 milioni-.

Quanti animali per ogni specie potranno essere acquistati?

La divisione per capitoli di spesa sarà :

i) totale per l'acquisto :

$$5x + 4y + 2z = 20 ,$$

ii) per gli stabuli:

$$10x + 10y + 12z = 66 ,$$

iii) per il nutrimento e l'assistenza veterinaria:

$$3x + 2y + 2z = 14.$$

Risolvendo il sistema di tre equazioni nelle tre incognite x, y, z che ne deriva, si ottiene : $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$. (Naturalmente x, y, z possono rappresentare capi di bestiame o altre unità di misura, ad esempio decine di capi di ogni specie).

Esempi:

i) In fisica delle particelle viene introdotta una grandezza, detta spin, associata ai vari tipi di particelle e matematicamente si usa una notazione matriciale, mediante le cosiddette matrici di spin di Pauli. Nel caso dell'elettrone le matrici usate sono tre:

$$S_x = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

essendo $\hbar$ la costante di Plank (divisa per 2π) e i l'unità immaginaria.

Si verifichi che è:

$$S_x S_y = \frac{1}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$S_y S_x = \frac{1}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

$$S_x S_x = S_{yy} = S_z S_z = \frac{1}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\hbar^2 I_{2\,2}.$$

In generale è:

$$S_i S_j + S_j S_i = \frac{1}{2}\hbar^2 \delta_{ij} I_{2\,2}, \qquad i,j = 1,2,3.$$

avendo posto $S_1 = S_x$, $S_2 = S_y$, $S_3 = S_z$, δ_{ij} simbolo di Kronecker, $I_{2\,2}$ la matrice identica 2×2.

ii) Il contenuto chimico, percentuale, di quattro tipi di terra è:

Terra	Azoto	Fosfato	Potassio
A	7	1	2
B	3	2	2
C	0	3	4
D	2	0	3

Si combinino i quattro tipi nel rapporto:

$$2(A) : 3(B) : 1(C) : 4(D).$$

Quale sarà la composizione chimica della terra così ottenuta?

In ogni unità di terra ottenuta dovranno esserci $\frac{2}{10}$ di A, $\frac{3}{10}$ di B, $\frac{1}{10}$ di C e $\frac{4}{10}$ di D. Ma i $\frac{2}{10}$ di A sono costituiti per il 7% di Azoto, 1% di Fosfato, 2% di Potassio, ecc.

Allora il contenuto di una unità di terra sarà ottenibile dal prodotto delle due matrici:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (3{,}1 \quad 1{,}1 \quad 2{,}6),$$

cioè si ha il 3,1% di Azoto, 1,1% di Fosfato, 2,6% di Potassio.

iii) In una dieta per cavie di laboratorio è previsto un pasto contenente 40 unità di carboidrati, 25 di grassi, 25 di proteine. Si hanno tre tipi di cibi aventi la seguente composizione:

Cibo	Carboidrati	Grassi	Proteine
x	5	3	1
y	2	3	5
z	7	2	3

Come occorre mischiare i cibi per ottenere il pasto richiesto?

La risposta si ottiene risolvendo il sistema:

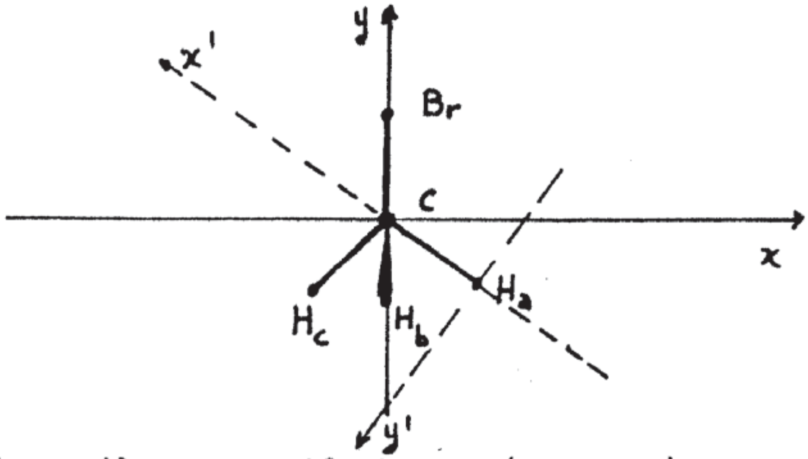
$$\begin{cases} 5x + 2y + 7z = 40 \\ 3x + 3y + 2z = 25 \\ x + 5y + 3z = 25 \end{cases}$$

e la soluzione è data da:

$$x = 4, \; y = 3, \; z = 2,$$

cioè occorre mischiare 4 parti di cibo x con 3 di y e 2 di z.

iv) Una molecola di bromuro di metile è orientata come in figura:



Si consideri ora il nuovo riferimento (O',x',y') avente origine in H_a, asse x' coincidente con $C-H_a$ e y' ortogonale a x'. Quali saranno le coordinate nel nuovo riferimento di un punto P, di vecchie coordinate (x,y)?.

E' $C(\alpha', \beta')$, quindi:

$$\begin{cases} x' = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - \alpha' \\ y' = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta - \beta' . \end{cases}$$

Così in questo sitema l'atomo di Bromo, che dista da C 1,939 Å, essendo inoltre: C-H = 1,095 Å e $(\widehat{x,x'}) = 107,2^{\circ}$, ha coordinate:

$$\begin{cases} x_{Br}' = 0 + 1,939 \sin 107,2^{\circ} - 1,095 = +1,669 \\ y_{Br}' = 0 + 1,939 \cos 107,2^{\circ} + 0 \qquad = -1,852. \end{cases}$$

ESEMPI DI MODELLI

Distribuzione di temperatura nel suolo:

-u funzione temperatura al suolo;

-x profondità,

- t tempo

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right) \\ |u(x,t)| \le M(t), \quad x \to +\infty, t \in R^+ \end{cases}$$

Dinamica delle popolazioni:

u: densità di individui

$$\begin{cases} u_t = \mu u_{xx} + \rho u \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

densità di individui nulla al bordo della colonia

Modello preda-predatore:

Vediamo il modello di **Volterra** che studia l'andamento di due popolazioni delle quali una è preda e l'altra è predatrice.

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases}$$

Ci chiediamo ora che cosa succederebbe alla soluzione del modello se ci fosse anche un **intervento dell'uomo** (per esempio la caccia) ad influenzare l'andamento di queste popolazioni. Il sistema precedente si modificherebbe così:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax\left(1 - \dfrac{by}{a}\right) - \varepsilon x \\ \dot{y} = -cy\left(1 - \dfrac{dx}{c}\right) - \varepsilon y \end{cases}$$

Supponiamo adesso che le prede abbiano **risorse limitate** (effetto di *sovraffollamento*), vogliamo studiare come si modifica il sistema e quindi il comportamento della soluzione.

Le nuove equazioni sono:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy - ex^2 \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases}$$