MODELLI MATEMATICI

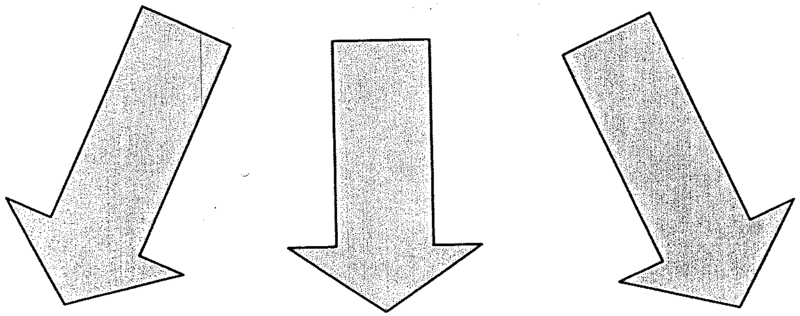
applicati allo studio delle epidemie

Un modello matematico è costituito da 1 o più equazioni che prendono in considerazione i diversi parametri coinvolti nella genesi e nell'evoluzione del fenomeno studiato. Nel nostro caso: la malattia

MODELLI MATEMATICI

- DETERMINISTICI: risultati fissi
- STOCASTICI: risultati casuali
- CONTINUI: le variabili cambiano con continuità. Utilizzano le equazioni differenziali.
- DISCRETI: le variabili sono misurate a intervalli. Si usano le equazioni alle differenze

Modelli usati in epidemiologia



SIR	SEIR	SIS
suscettibili	suscettibili	suscettibili
infetti	esposti	infetti
rimossi	infetti	suscettibili
	rimossi	

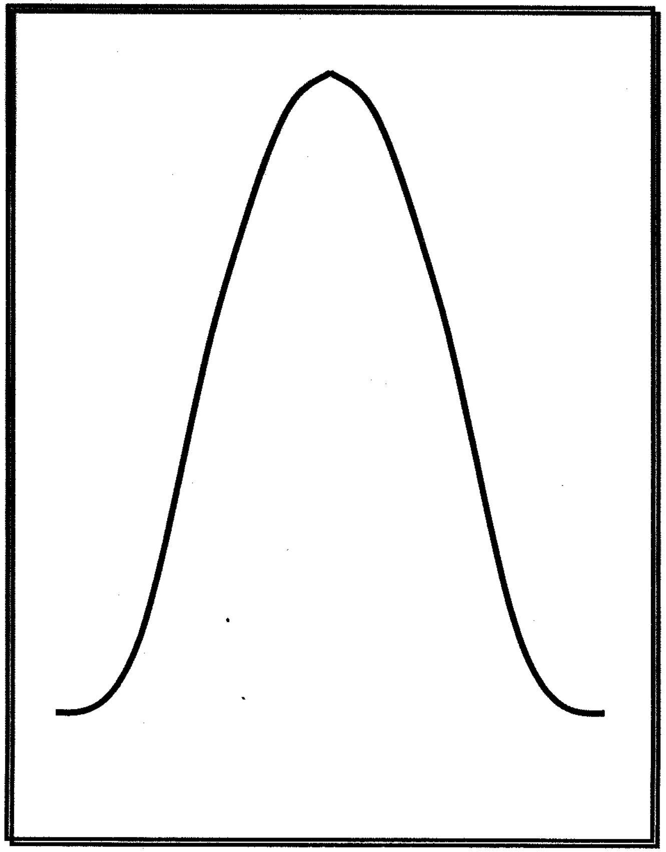
ESEMPI DI MODELLI

Modello di Kerman-McKendrick

E' un modello:

- deterministico
- discreto
- appartiene alla categoria SIR

Il grafico di una epidemia seguendo il modello di Kerman-McKendrick ha una forma a campana.



Ipotesi alla base del modello

- un soggetto infettato diventa immediatamente infettivo
- i soggetti rimossi non sono più infettivi
- la popolazione rimane costante durante l'epidemia
- la popolazione studiata è infettabile allo stesso modo
- il tempo è suddiviso in intervalli uguali e discreti

Analisi matematica del modello

INTRODUCIAMO LE VARIABILI:

- X_t = suscettibili al tempo t
- X_{t+1} = suscettibili al tempo t+1
- Y_t = infetti al tempo t
- Y_{t+1} = infetti al tempo t+1
- Z_t = rimossi al tempo t
- Z_{t+1} = rimossi al tempo t+1
- b = parametro di infettività
- g = parametro di guarigione

Il modello può essere quindi formulato usando:
EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE

Equazione per la variazione della densità del numero dei soggetti suscettibili per unità di tempo:

$$X_t - X_{t+1} = -bX_tY_t$$

Equazione per la variazione della densità del numero dei soggetti infettivi per unità di tempo:

$$Y_t - Y_{t+1} = bX_tY_t - gY_t$$

Equazione per la variazione della densità del numero dei soggetti rimossi per unità di tempo:

$$Z_t - Z_{t+1} = gY_t$$

Modello di Reed-Frost

E' un modello:

- probabilistico
- discreto
- appartiene alla categoria SIR

Ipotesi alla base del modello

- il tempo è discreto (decorre con numeri interi 1,2,3,...)
- i soggetti hanno la stessa probabilità di essere infettati
- l'infezione dura una unità di tempo
- all'inizio dell'epidemia possono esserci soggetti rimossi
- l'infezione si propaga per contatto
- il contatto tra 1 rimosso e 1 infetto non causa l'infezione

Il comportamento del modello è determinato dal numero di soggetti infettivi presenti al tempo $t = 0$ e poi dalla probabilità di transizione dallo stato suscettibile allo stato infetto.

INTRODUCIAMO LE VARIABILI:

- p = probabilità di un contatto efficiente
- q = probabilità di non essere infettato

$$q = 1 - p$$

- I_t, I_{t+1} = infetti al tempo t e $t+1$
- S_t = suscettibili al tempo t

Il modello si basa sull'applicazione ricorsiva della seguente formula:

Numero dei casi contagianti al tempo t+1

Numero di animali suscettibili al tempo t

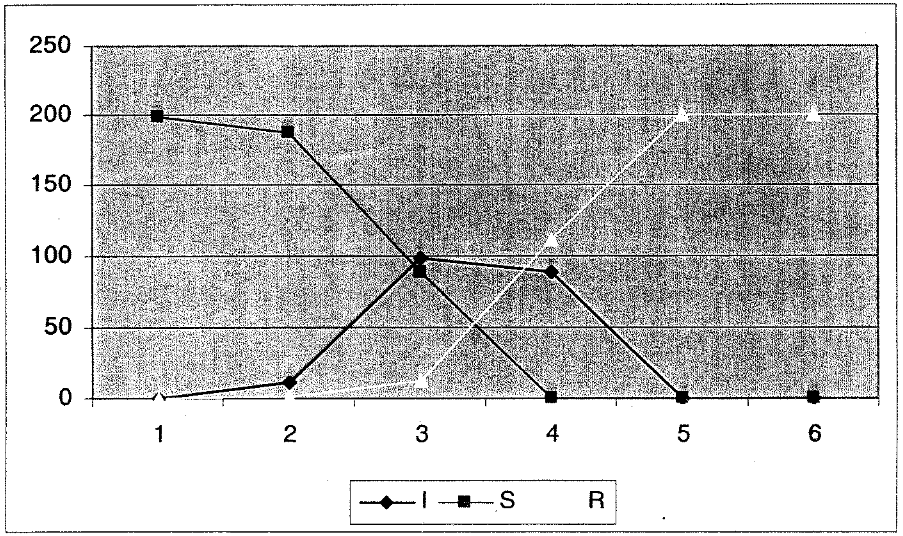
$$I_{t+1} = S_t \left(1 - q^{I_t}\right)$$

Probabilità che almeno uno dei casi I_t infetti al tempo t compia un contatto efficiente

Modello di Reed Frost - Esempio 1

popolazione	n=200
prob. contatto efficiente	p=0.06
prob. contatto NON efficiente	q=0.94

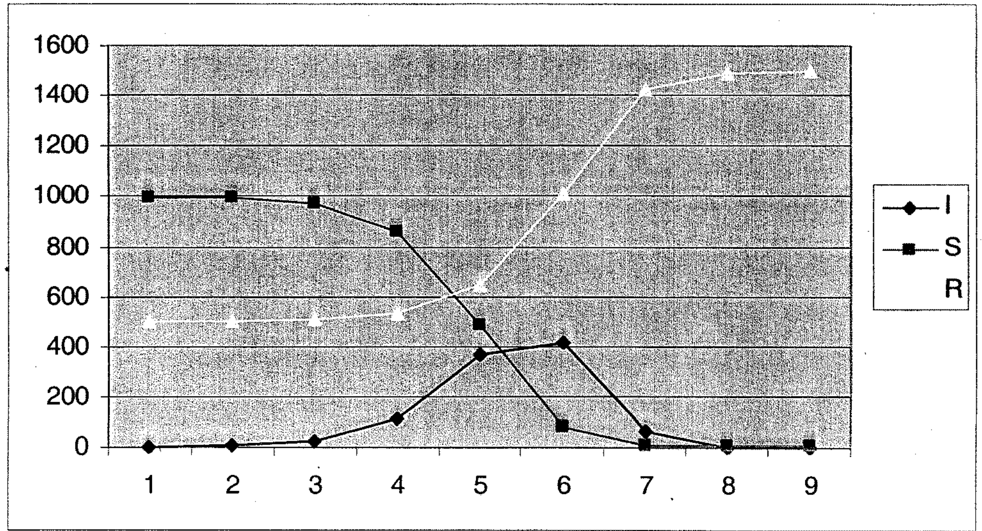
Tempo	I	S	R
0	0	199	0
1	12	187	1
2	98	89	13
3	89	0	111
4	0	0	200
5	0	0	200



Modello di Reed Frost - Esempio 2

popolazione	n=1500
prob. contatto efficiente	p=0.005
prob. contatto NON efficiente	q=0.995

Tempo	I	S	R
0	1	999	500
1	5	994	501
2	25	969	506
3	112	857	531
4	369	488	643
5	411	77	1012
6	67	10	1423
7	3	7	1490
8	0	7	1493



Modello di Reed Frost - Esempio 3

popolazione	n=100000
prob. contatto efficiente	p=0.001
prob. contatto NON efficiente	q=0.999

Tempo	I	S	R
0	1	99999	0
1	100	99899	1
2	9511	90388	101
3	90381	7	9612
4	7	0	99993
5	0	0	100000
6	0	0	100000
7	0	0	100000
8	0	0	100000